5 等价关系、分类问题与描述集合论

高 速

在数学的许多分支中, 对所研究的数学对象进行分类是这些分支中非常重要, 甚至是核心的问题. 这是现代数学经过不断的抽象化的发展到今天一个普遍的现象. 比如, 代数中群的概念的提出源于研究代数方程解的需要. 但在今天, 对于群的完全分类成为代数中更为重要的问题. 再比如, von Neumann 在 20 世纪 30 年代创立遍历论之初提出保测变换这个中心概念的同时就提出, 对于保测变换进行分类应该是遍历论的核心问题之一. 他身体力行和他的学生 Halmos 一起给出了对保测变换进行分类的第一个重要结果. 我们甚至可以这样讲, 每出现一个新的重要的数学对象 (空间、结构、系统等), 也就出现了一个新的重要的分类问题.

从 20 世纪 80 年代开始, 一些描述集合论的研究工作者发展出一套关于等价关系复杂度的数学理论 (我们今天称之为不变量描述集合论), 并将这一理论成功地应用于数学分类问题的研究中. 这个理论开始于一个微不足道的事实, 那就是所有的分类问题本质上也就是等价关系. 经过三十多年快速的发展和越来越多的来自各个分支的数学家的共同努力, 我们现在已经对很多数学中重要的分类问题的复杂度有了一个统一的和相当深入的认识. 当然, 也还有更多的问题等待我们去研究、去回答.

描述集合论作为数理逻辑和集合论的一个分支可能不为广大中国数学工作者所熟悉. 但它在分类问题的研究中的成功不是偶然的. 首先, 不变量描述集合论集中了一个复杂度理论所需的所有元素. 这个理论的中心概念, 即 Borel 归约的概念, 来自数理逻辑的另外一个分支 —— 可计算性理论. 而要得到 Borel 归约的基本性质, 则要用到经典描述集合论近百年发展中得到的几乎所有重要的结果. 而这些结果已经集成了数学中很多其他分支的方法和结果, 包括分析、拓扑、代数、逻辑等. 另外, 不变量描述集合论现在广受关注, 也因为它真正关心和可以解决其他数学分支关心的问题, 而不是仅仅为了应用去发现一些问题来研究. 这种双向的甚至是多向的交流和相互渗入正是作为统一的现代数学发展的活力所在.

在本文中我尝试对不变量描述集合论, 特别是它在分类问题研究中的应用作一个初步的介绍. 希望借此能够促进一些新的合作机会的产生, 以及吸引有兴趣的学生来从事这方面的研究. 特别感谢数学所提供的这个难得的机会. 在数学所

讲座报告和本文写作的过程中席南华院士、冯琦研究员和南开大学的丁龙云教授提出了宝贵的意见和建议, 在此一并表示衷心感谢.

5.1 等价关系

等价关系是数学中一个常用的初等概念. 它是指一个集合上满足自反律、对称律和传递律的任何二元关系. 为了确立记号的需要, 我们回顾一下这一定义的细节.

定义 5.1.1 设 X 为一集合及 $E \subseteq X \times X$ 为 X 上的二元关系. 如果对任意 $x, y, z \in X$ 满足:

(i) (自反律) $(x, x) \in E$,

(ii) (对称律) 若 $(x, y) \in E$, 则 $(y, x) \in E$,

(iii) (传递律) 若 $(x, y) \in E$ 及 $(y, z) \in E$, 则 $(x, z) \in E$,

那么称 E 为等价关系.

在实践中经常把 $(x, y) \in E$ 写成 xEy. 比如, 我们见到的最常用的等价关系就是集合元素的相等关系 $x = y$, 而不写成 $(x, y) \in =$.

等价关系无处不在. 我们看几个例子.

例 5.1.1 (1) 陪集等价关系：如果 G 是一个群而 $H \leqslant G$ 是 G 的子群, 则可定义

$$g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in H \iff g_1 H = g_2 H,$$

也就是说, g_1 和 g_2 等价当且仅当它们的左陪集相等. 这样定义的 $\sim$ 是一个等价关系.

(2) 轨道等价关系：如果 $G \curvearrowright X$ 是一个群 G 在集合 X 上的作用, 则可定义

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G\ g \cdot x_1 = x_2 \iff \{g \cdot x_1 : g \in G\} = \{g \cdot x_2 : g \in G\}.$$

因为集合 $\{g \cdot x : g \in G\}$ 称为 x 的轨道, 这里的 $\sim$ 实际上是 X 上元素之间轨道相等的关系. 当然, 前面例子中的陪集等价关系是轨道等价关系的特例.

(3) Vitali等价关系 $\sim_V$：若 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义

$$x \sim_V y \iff x - y \in \mathbb{Q},$$

因为有理数 $\mathbb{Q}$ 的加法群是实数 $\mathbb{R}$ 加法群的子群, 这里的 $\sim_V$ 实际上是一个具体的陪集等价关系. 历史上 Vitali 利用这个等价关系, 以及利用选择公理, 构造出了著名的非 Lebesgue 可测集的例子, 称为 Vitali 集. 一个 Vitali 集是由每个 $\sim_V$ 的等价类中任选一个元素所组成的集合.

(4) 测度等价关系$\equiv_m$: 两个测度的等价定义为它们相对彼此绝对连续. 而测度 μ 相对于测度 ν 绝对连续则定义为

$$\mu \ll \nu \iff \forall A(\nu(A)=0 \to \mu(A)=0),$$

所以

$$\mu \equiv_m \nu \iff \mu \ll \nu \text{ 且} \nu \ll \mu.$$

以上几个随机检选的例子应该是所有数学系研究生在基础课中已经接触过的. 读者应该还可以想出很多其他等价关系的例子.

在不变量描述集合论中, 我们研究不同等价关系之间的相对复杂度. 而这里一个关键概念就是归约的概念.

定义 5.1.2 设 E 和 F 分别为集合 X 和 Y 上的等价关系. 如果存在函数 $f: X \to Y$ 使得对任何 $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 E x_2 \iff f(x_1) F f(x_2),$$

则称 E归约到 F, 记为 $E \leqslant F$.

E 归约到 F 的直观意义就是将关于 E 的问题转化为关于 F 的问题. 如果关于 F 的问题可以得到回答, 那么通过归约关于 E 的问题也可以得到回答. 在这个意义下 E 的复杂度不超过 F 的复杂度.

简单地说, 不变量描述集合论的目标就是确定各个等价关系之间的归约或不归约, 从而建立起一个等价关系复杂度的全景图. 但在我们做到这一点之前, 还有一些障碍需要清除. 为了说明这些障碍是什么, 我们先来看一些分类问题, 特别是已经得到满意解决的分类问题的例子.

5.2 作为等价关系的分类问题

例 5.2.1 在线性代数中我们考虑对复方矩阵 (以及它们所代表的线性算子) 的相似形进行分类. 两个矩阵 A 和 B 称为相似当且仅当存在一个非奇异矩阵 S 使得 $A = S^{-1}BS$.

对这一问题我们在线性代数中已经有了完整而满意的回答. 那就是给定任意的复方矩阵, 我们可以计算出它的 Jordan 标准形, 而两个矩阵相似当且仅当它们的 Jordan 标准形实质上是相等的.

对这个例子稍加进一步分析, 我们可以发现这实际上是一个轨道等价关系的例子. 这里的作用群就是复域 $\mathbb{C}$ 上的一般线性群, 而群作用则是在所有复方矩阵所组成的空间上的共轭作用. 我们所谓对这一问题的满意回答, 则本质上是找到

了一个归约, 使得看上去比较艰难的原始问题, 转化成为一个我们认为比较容易的问题 (即比较两个 Jordan 标准形是否一样的问题). 再进一步, 一个 Jordan 标准形对应着一系列特征值、阶次和它们的重数, 而这些数值总体的信息完全可以用一个复数 (甚至实数) 来编码. 也就是说, 事实上存在着一个值域为 $\mathbb{R}$ 的归约函数, 将复方矩阵之间的相似关系归约到实数集上的相等关系.

我们对这一分类结果满意, 有两个原因. 一是所归约到的等价关系非常简单具体. 二是, 也是更重要的, 就是这个归约函数也非常具体, 可以计算.

例 5.2.2 考虑对有限生成的交换群进行分类. 代数中的分类问题通常对应于代数结构间的同构关系.

抽象代数中一个熟知而初等的定理, 有时称为有限生成交换群基本定理, 说的是任意一个有限生成的交换群同构于一个唯一的如下形式的直和

$$\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p_n^{r_n}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}^m,$$

而其中 n 和 m 是非负整数, $p_1,\cdots,p_n$ 为不同的素数, 以及 $r_1,\cdots,r_n$ 为正整数. 按照我们通常的理解, 这个分类问题就此已经得到了完满的回答, 因为所有的有限生成交换群的同构类型就由这样的一组数据完全刻画了. 但仔细想来, 这里似乎还缺一个环节, 那就是定理叙述本身并没有指出如何由任意给定的有限生成交换群去计算它的标准形式. 这样的算法是有的, 而且可以从该定理的证明中提取出来. 至此这个分类问题才算彻底解决了.

和前一个例子一样, 这里的一组数据可以由一个数来进行编码而不失信息, 而且在这里可以用自然数而不需要所有实数. 这样一来, 我们实际上得到一个值域为 $\mathbb{N}$ 的归约函数, 来把某个空间上的同构等价关系归约到 $\mathbb{N}$ 上的相等关系.

虽然同为相等关系, 但因为在不同集合上, 它们的复杂度是不同的. 我们用 $=_\mathbb{R}$ 来记 $\mathbb{R}$ 上的相等关系, 而用 $=_\mathbb{N}$ 来记 $\mathbb{N}$ 上的相等关系. 容易得到 $=_\mathbb{N}\leqslant=_\mathbb{R}$ 而 $=_\mathbb{R}\not\leqslant=_\mathbb{N}$. 记为 $=_\mathbb{N}<=_\mathbb{R}$. 这个陈述的直观意义就是说 $=_\mathbb{R}$ 的复杂度要高出 $=_\mathbb{N}$ 的复杂度.

到目前为止我们举的例子都是初等浅显的例子, 其中包含的数学知识来自于大学水平的基础课程. 下面要举的例子则要用到相当深刻的结果.

例 5.2.3 考虑对 Bernoulli 推移的同构类型进行分类. Bernoulli 推移是一个四元组 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$, 其中

(1) $X=\{1,2,\cdots,n\}^\mathbb{Z}$, $n\geqslant 1$ 为正整数,

(2) $\mathcal{B}$ 是由 X 上乘积拓扑生成的 Borel σ- 代数,

(3) μ 是由 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上某个概率分布 $(p_1,\cdots,p_n)$(满足 $\sum_{i=1}^n p_i=1$) 所决定的乘积测度,

(4) T 是 X 上的推移变换：若 $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, 则

$$(Tx)_k = x_{k-1},$$

Bernoulli 推移是保测变换最重要的实例之一, 在概率论和动力系统研究中有着不可替代的历史价值和实用价值. 作为保测变换, 它们之间的同构是这样定义的. 两个保测变换 $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ 和 $(Y,\mathcal{C},\nu,S)$ 同构, 是指存在子集 $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$ 及保测度的双射 $\varphi: A\to B$ 满足 $\mu(A)=1$, $\nu(B)=1$ 及 $\varphi\circ T=S\circ\varphi$ a.e.

为了研究这一分类问题, Kolmogorov 和他的学生 Sinai 定义了熵的概念. 从计算的角度, 上面的 Bernoulli 推移的熵是非常简单的：

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

他们证明了熵是任何保测变换的一个 (同构) 不变量, 即同构的保测变换具有相同的熵. Ornstein 在 1970 年发表了他的惊人结果[29]：熵也是 Bernoulli 推移的完全不变量, 即两个 Bernoulli 推移同构当且仅当它们有相同的熵.

因为熵是一个非负实数, 在这一个例子中我们又一次看到一个与分类问题相对应的等价关系经由一个容易计算的归约函数归约到实数上的相等关系.

定义 5.2.1 设 E 为等价关系. 如果 $E\leqslant =_{\mathbb{R}}$, 我们就称 E 为流畅的(smooth).

如果一个分类问题对应着流畅的等价关系, 我们也称这个分类问题为流畅的. 我们已经看到, 流畅的分类问题并不见得有相同的复杂度, 但它们都被认为是有了完满的解答. 在过去的几十年中还出现了很多类似的结果. 我们下面再举两个非初等的例子.

1965 年 Effros[8] 证明了对 I 型可分 C^*- 代数的表示进行酉等价分类是一个流畅的分类问题. 事实上, 流畅一词的使用来源于此结果.

1999 年 Gromov[20] 证明了对紧度量空间的等距同构类型进行分类是一个流畅的分类问题.

我想读者读到这里, 一定有很多的问题. 比如, 有没有分类问题已经被证明是非流畅的? 事实上, 上面加起来共五个例子, 每一个都可以问出更一般性的分类问题. 我们下面罗列一些这样的问题, 并注明它们所属的数学分支.

(1) 无穷维 Hilbert 空间上所有有界线性算子的酉等价关系 (泛函分析),

(2) 所有可数群的同构关系 (代数),

(3) 所有保测变换的同构关系 (动力系统和遍历论)(这就是 von Neumann 提出的问题),

(4) 所有可分 C^*- 代数表示的酉等价关系 (算子代数),

(5) 所有可分完备度量空间的等距同构关系 (几何),

(6) 所有紧度量空间的同胚关系 (拓扑),

……

这里的每一个问题都是相应领域里面的大问题, 是数学家真正关心的, 希望解决的问题. 在后面我们会讲到, 所有这些问题都被考虑过, 我们现在已经有了部分的或完整的答案. 但也还有一些重要的遗留问题.

有些读者的问题可能不是上面这些, 而是对于我们理论框架的疑虑. 比如, 到目前为止我们只看到了两个复杂度不同的等价关系的例子, 即 $=_{\mathbb{N}}$ 和 $=_{\mathbb{R}}$. 直观上说, 它们之所以不同是它们有着不同数目的等价类, 即一个是可数的而另一个是不可数的. 如果整个不变量描述集合论只是在讨论等价类的个数, 那么这个理论就没有存在的必要. 但一个细心的读者可能会意识到, 我们关于归约的定义 5.1.2 恰恰有这方面的问题. 如果可以用选择公理, 那么 $E \leqslant F$ 当且仅当 E 的等价类的个数小于或等于 F 的等价类的个数. 这就是我们在 5.1 节结尾时所指的障碍!

所以我们有必要对归约的定义作一定的修改和补充, 而修改和补充的依据则是注意到, 在所有流畅的分类问题的讨论中, 我们都坚持了归约函数要具体、可以计算. 如果只是借助选择公理而声称存在一个归约函数, 对于具体的分类问题是没有帮助的. 在 5.3 节中, 我们要给出一些细节来实现这些想法. 有些细节刚看上去可能不很自然, 但是却是经过三十多年的研究而确立的最合适的理论框架.

5.3　等价关系的描述集合论

传统上, 描述集合论研究实数集 $\mathbb{R}$ 的可定义子集. 哪些 $\mathbb{R}$ 的子集是可定义的不是一个一成不变的概念. 最常用的可定义子集的概念是 Borel(可测) 集 (即来自 Borel σ- 代数中的集合). 这是不是意味着描述集合论的研究范畴比较狭窄呢? 我们下面会看到, 绝非如此.

我们先给一个一般性的定义. 设 X 为集合及 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集的子集. 如果 $\mathcal{B}$ 是一个 σ-代数 (即对可数并、可数交和补集运算封闭), 则称 $(X, \mathcal{B})$ 为 Borel 空间.

定义 5.3.1　设 $(X, \mathcal{B})$ 为 Borel 空间. 记 $\mathbb{R}$ 上 Borel 集的全体为 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 如果存在从 $(X, \mathcal{B})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 的同构嵌入, 即单射 $f: X \to \mathbb{R}$ 使得对任何 $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$A \in \mathcal{B} \iff f(A) = \{f(x) : x \in A\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

则我们称 $(X, \mathcal{B})$ 为标准 Borel 空间.

只要没有歧义, 我们通常略去 $\mathcal{B}$ 而直接称 X 为标准 Borel 空间. 简而言之, 所有标准 Borel 空间都同构于 $\mathbb{R}$ 的 Borel 子空间. 描述集合论的研究范畴由此可以扩大到所有标准 Borel 空间.

标准 Borel 空间是一个极为宽广的概念. 它的例子不仅包括我们熟悉的 $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 等, 也包括它们的乘积, 如 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 等, 从有穷和无穷维的 Hilbert 空间, 到所有的 Banach 空间都是标准 Borel 空间的例子. 通过适当的编码我们可以把所有可数结构看成标准 Borel 空间的元素. 比如, 所有的可数有向图可以看成 $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 的元素. 这样, 所有可数有向图就组成了一个标准 Borel 空间. 类似地, 我们也可以考虑所有可数群的空间等.

更进一步, 有很多超空间 (hyperspace) 也是标准 Borel 空间. 其中最著名的例子就是 Effros 标准 Borel 空间. 它是这样定义的. 设 X 为任意可分的完备度量空间. 考虑 X 上的所有闭集的集合, 记为 $F(X)$. 定义 $F(X)$ 上 Borel 结构 $\mathcal{B}$ 为由如下形式的集合所生成的最小 σ- 代数：

$$\mathcal{A}_U = \{F \in F(X) : F \cap U \neq \varnothing\},$$

其中 $U \subseteq X$ 是 X 的非空开子集.

利用 Effros 标准 Borel 结构可以使很多超空间都变成标准 Borel 空间. 比如, 全体可分 Banach 空间所组成的超空间 (每一个可分 Banach 空间是这个超空间的一个点); 全体可分完备度量空间所组成的超空间; 全体紧度量空间所组成的超空间, 等等. 通过适当的编码我们也可以考虑算子的空间、函数的空间; 甚至群表示的空间等; 它们也大都可以组成标准 Borel 空间.

这样一来, 描述集合论的研究对象就包罗万象, 涵盖了数学几乎所有的分支. 而我们前面提到的数学中的分类问题, 也就自然成为标准 Borel 空间上的等价关系. 有了这个基本认识, 我们就可以弥补前面两节中理论上的不足, 而给出如下定义.

定义 5.3.2 设 $(X,\mathcal{B})$ 和 $(Y,\mathcal{C})$ 为标准 Borel 空间. 函数 $f : X \to Y$ 称为Borel函数, 如果对任意 $C \in \mathcal{C}$,

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\} \in \mathcal{B},$$

我们把 Borel 函数作为具体、可计算的函数的典型.

定义 5.3.3 设 E 和 F 分别为标准 Borel 空间 X 和 Y 上的等价关系. 如果存在 Borel 函数 $f : X \to Y$ 使得对任何 $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 E x_2 \iff f(x_1) F f(x_2),$$

则称 E Borel归约到 F, 记为 $E \leqslant_B F$.

如果 $E \leqslant_B F$ 但 $F \nleqslant_B E$, 记为 $E <_B F$. 如果 $E \leqslant_B F$ 且 $F \leqslant_B E$, 则称 E 和 F Borel等价, 记为 $E \sim_B F$.

定义 5.3.4 设 E 为标准 Borel 空间上的等价关系. 如果 $E \leqslant_B =_{\mathbb{R}}$, 我们就称 E 为流畅的(smooth).

在 5.2 节所有五个流畅分类的例子中, 数学对象都可以用标准 Borel 空间的元素来编码, 而所有的归约函数也都是 Borel 函数. 事实上, 除了例 5.2.2 的分类问题和 $=_{\mathbb{N}}$ Borel 等价以外, 其他四个分类问题都 Borel 等价于 $=_{\mathbb{R}}$.

至此我们才做好了发展不变量描述集合论的概念准备. 不变量描述集合论理论的中心任务是确立大量的基准 (benchmark) 等价关系并且搞清楚这些基准等价关系之间的 Borel 归约或不归约. 一般说来, 一个等价关系之所以被确立为基准等价关系有两个可能的原因. 一个原因就是它等价于一系列自然而重要的分类问题. 而另一个可能的原因是它在 Borel 归约分层中被证明有极为特殊的性质. 而不变量描述集合论的应用则是将新的分类问题与基准等价关系进行比较, 从而确定分类问题的相对复杂度. 从这里就可以看出, 不变量描述集合论的理论和应用不是界线分明的, 而是相互促进、相辅相成的.

在前两节中我们提到四个具体的等价关系, 分别是 $\mathbb{N}$ 上的相等关系 $=_{\mathbb{N}}$、$\mathbb{R}$ 上的相等关系 $=_{\mathbb{R}}$、Vitali 等价关系 $\sim_V$ 和测度等价关系 $\equiv_m$. 它们之间的 Borel 归约如下：

$$=_{\mathbb{N}} <_B =_{\mathbb{R}} <_B \sim_V <_B \equiv_m,$$

这几个关系都被认为是基准等价关系, 其中原因各不相同. 在这一节后半部分, 我们专就这四个等价关系做一个详细的说明.

从前面的讨论中我们已经看到, 与 $=_{\mathbb{R}}$ 具有相同复杂度的分类问题大量存在. 所以 $=_{\mathbb{R}}$ 是一个当之无愧的基准等价关系. 所有流畅的分类问题, 也就是复杂度不高于 $=_{\mathbb{R}}$ 的分类问题, 都可以用一个实数作为完全不变量进行分类. 现已证明, 所有流畅的等价关系 (或分类问题)E 的复杂度, 只能有如下三种可能性：

(1) E 仅有有穷多个等价类;

(2) E 的等价类个数为可数无穷多, 此时 $E \sim_B =_{\mathbb{N}}$;

(3) $E \sim_B =_{\mathbb{R}}$.

在描述集合论中, 第一种情况被视为平凡的, 但在数学中它也许对应着极不平凡的结果. 举例来说, Poincaré 猜测也可以理解为一个分类问题, 只不过结论是只有一个等价类. 对于这样的问题, 描述集合论起不上什么作用. 第二种情况我们前面举了一个例子. 在数学中类似的例子还很多. 比如, 大家熟知的紧有向曲面的分类问题, 完全不变量可以由 Euler 示性数给出. 这说明只有可数无穷多个

同胚等价类, 而它的复杂度等同于 $=_{\mathbb{N}}$. 等价类个数为可数无穷多的问题在数学中非常普遍, 因此 $=_{\mathbb{N}}$ 也就自然地成为一个基准等价关系.

人们早就知道 Vitali 等价关系 $\sim_V$ 不是流畅的. 事实上它的证明可以归结为, 如果 $\sim_V \leqslant_B =_{\mathbb{R}}$, 则可以作出 $\mathbb{R}$ 的一个 Borel 子集 S 使得 S 与每个 $\sim_V$ 的等价类的交是一个单点集, 也就是说, 可以作出一个 Borel 的 Vitali 集, 矛盾! 关于 Vitali 等价关系 $\sim_V$ 的有趣现象是, 和它具有相同复杂度的等价关系不断出现. 最著名的例子就是等价关系 E_0. E_0 是无穷 0, 1 串的空间 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上的终极相等关系:

$$(x,y) \in E_0 \iff \exists n \forall m \geqslant n\ x(m) = y(m).$$

因为 E_0 的定义形式是组合的, 在数学证明中比较好处理, 在描述集合论中 E_0 的应用要多于 $\sim_V$. 在不变量描述集合论作为一个分支出现之前, 数学家们已经开始用 E_0 来证明有些分类问题不是流畅的. 也就是说, 因为我们已经知道 E_0 不流畅, 那么要证明某个等价关系 E 不流畅, 只需证明 $E_0 \leqslant_B E$.

举例来说, 在 Ornstein 证明了用熵可以对 Bernoulli 推移进行完全分类后, 一个自然的问题就是：对于更一般的保测变换, 熵是否还是完全不变量？更进一步问, 是否存在一个更一般的熵的概念, 可以作为所有保测变换的完全不变量？有很多数学家真正致力于推广熵的概念, 这应该是非常有意义的工作. 然而早在 20 世纪 90 年代, Feldman[9] 已经证明了 E_0 可以 Borel 归约到一般保测变换的分类问题. 这就是说, 一般保测变换的分类问题不是流畅的, 不可能用一个实数作为完全不变量对所有保测变换的同构类型进行分类. 那么, 任何推广的熵的概念, 要么不会是完全不变量, 要么不再是一个简单的相等关系.

关于保测变换的分类问题, 也就是 von Neumann 提出的遍历论中的同构问题, 我们在此再提两个相关的重要结果. 一个就是在引言里我们提到的关于这个问题的历史上第一个重要结果, 是由 von Neumann 本人和他的学生 Halmos 共同证明的. 他们考虑了所有具有离散谱的保测变换, 证明了这些变换的谱集本身就是完全不变量. 这里的谱集都是可数的复数集合. 另一个结果是关于遍历的保测变换的同构分类. 一般的保测变换总可以唯一分解为它的遍历分支的积分和, 所以对于遍历的保测变换进行分类在某种意义上等同于解决原来的分类问题. 2011 年, Foreman、Rudolph 和 Weiss 在《数学年刊》上发表文章 [11], 证明了遍历保测变换的分类问题是一个非 Borel 的等价关系. 由此可以推出, 这个分类问题不是流畅的. 为什么呢？我们先给个定义.

定义 5.3.5 设 X 为标准 Borel 空间及 E 为 X 上的等价关系. 若 E 作为 $X \times X$ 的子集是 Borel 的, 则称 E 为 Borel等价关系.

从 Borel 归约的定义容易看出, 如果 $E \leqslant_B F$ 并且 F 是 Borel 等价关系, 则 E

一定也是 Borel 等价关系. $=_{\mathbb{R}}$ 当然是 Borel 等价关系; 事实上, 我们现在所考虑的全部四个等价关系都是 Borel 等价关系. 这样一来, 如果一个等价关系不是 Borel 的, 那么它也就不是流畅的.

在 5.4 节再接着讨论 $\sim_V$ 及与它具有相同复杂度的等价关系. 现在我们来看看测度等价关系 $\equiv_m$. 现在我们已经知道, $\equiv_m$ 是一个 Borel 等价关系, 并且它的复杂度高于 E_0 的复杂度. 但为什么把它看成是一个基准等价关系呢? 这是因为它和数学中重要的分类问题相关. 泛函分析中的谱理论给出了对各种有界线性算子的酉等价类型进行分类的理论基础. 这一理论最成功的应用在于对自伴算子和酉算子的研究. 从谱的角度来说, 自伴算子和酉算子的区别在于, 自伴算子的谱是实数集的子集, 而酉算子的谱是复平面上单位圆的子集. 从谱理论可以得出, 自伴算子 (或酉算子) 的酉等价类型完全取决于所谓的谱测度的等价. (实际情况是还要考虑所谓的重数理论, 我们这里为讨论方便作一些简化.) 也就是说, 这些重要的分类问题实际上可以 Borel 归约到 $\equiv_m$. 进一步还可以证明, 它们的复杂度实际上和 $\equiv_m$ 是相同的.

5.4 不变量描述集合论

在前面几节中我们定义了不变量描述集合论的基本概念, 也给出了大量的分类问题的实例来说明描述集合论的框架可以为分类问题的研究提供有用的信息. 在这一节中我们的注意力将暂时离开分类问题, 着重介绍一些不变量描述集合论的独特的理论成果.

我们的讨论从 E_0 在 Borel 归约分层中的独特地位开始. 20 世纪 60 年代, 在对算子代数的研究中, Glimm[19] 和 Effros[8] 得到了如下结果. (事实上, Effros Borel 结构也是这一时期的成果.)

定理 5.4.1 (Glimm–Effros 二分定理) 设 G 为局部紧的可分拓扑群及 X 为标准 Borel 空间. 假定 $G \curvearrowright X$ 是 Borel 的群作用而引出轨道等价关系 E, 则要么 E 是流畅的, 要么 $E_0 \leqslant_B E$.

在这个定理的叙述中出现了拓扑群在 Borel 空间上的 Borel 作用的概念, 我们给一个一般性定义. 设 G 为拓扑群且 X 为 Borel 空间. 一个 G 在 X 上的作用, 前面我们记为 $G \curvearrowright X$, 实际上是一个函数 $\alpha : G \times X \to X$ (当然它要满足群作用的几条公理). 如果 α 是 Borel 函数, 则称 G 在 X 上的作用为 Borel 作用. 一般来说, Borel 群作用并不一定引出 Borel 等价关系. 但在作用群为局部紧的情形下, 所得到的轨道等价关系确实是 Borel 的.

以上定理于 1990 年由 Harrington、Kechris 和 Louveau[21] 推广到所有标准

Borel 空间上的 Borel 等价关系.

定理 5.4.2 (Harrington–Kechris–Louveau) 设 E 为某标准 Borel 空间上的 Borel 等价关系, 则要么 E 是流畅的, 要么 $E_0 \leqslant_B E$.

从这个定理我们可以得出, 在 $=_{\mathbb{R}}$ 和 E_0 之间没有任何其他的复杂度. 也就是说, E_0 是在 Borel 归约分层中 $=_{\mathbb{R}}$ 后的最小的 Borel 等价关系. 这就给出了确定 E_0 为基准等价关系的一个强有力的理论证据.

为了进一步说明 E_0 作为一个复杂度的基准所具有的广泛内涵, 我们来定义几个新的概念.

定义 5.4.1 设 E 为不可数标准 Borel 空间 X 上的等价关系. 若 E 的每个等价类都是有限的, 就称 E 为有限的(finite). 若 E 可以写成可数多个上升的有限等价关系 E_n 的并, 即 $E = \bigcup_n E_n$ 而且对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有 $E_n \subseteq E_{n+1}$, 则称 E 为超限的(hyperfinite). 若 E 是超限的而 $F \leqslant_B E$, 则称 F 为本质上超限的(essentially hyperfinite), 简称本超限的.

可以证明, 所有有限的 Borel 等价关系都是流畅的. 而 E_0 和 $\sim_V$ 则是超限的. E_0 的超限性特别容易从定义得到. 超限性的概念是 Ornstein 和 Weiss 在 20 世纪 80 年代早期在遍历论中引入的概念. 他们在 [30] 中证明了如下结果.

定理 5.4.3 (Ornstein–Weiss) 设 Γ 为可数可控 (amenable) 群及 X 为标准概率空间. 假定 $\Gamma \curvearrowright X$ 是 Borel 群作用而引出轨道等价关系 E, 则存在 X 的满测度子集使得 E 在这个子集上是超限的.

到今天为止不变量描述集合论中一个重要问题仍然是: 是否可以在如上定理中去掉所有与测度相关的表述? 也就是说, 是否所有可数可控群作用引出的轨道等价关系都是超限的?

从下面的结果可以看到, 对于超限性的研究是和 E_0 息息相关的.

定理 5.4.4 (Dougherty–Jackson–Kechris[7]) 设 E 为某标准 Borel 空间上的等价关系, 则 E 是本超限的当且仅当 $E \leqslant_B E_0$.

考虑 $\mathbb{Z}$ 在 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ 上的推移作用:

$$(g \cdot x)(h) = x(h - g)$$

Slaman 和 Steel 在 20 世纪 80 年代证明了这个作用所引出的轨道等价关系是超限的. 1994 年, Dougherty、Jackson 和 Kechris[7] 推广了这一结果, 证明了任何 $\mathbb{Z}^n$ 作用所引出的轨道等价关系是超限的. 2002 年, Jackson、Kechris 和 Louveau[23] 进一步推广到所有具有多项式增长率的可数群的作用. (具有多项式增长率的可数群是几何群论中重要的研究对象. Gromov 的著名定理给出了这类群的代数刻画: 有限生成的、幂零群的有限扩张群 (nilpotent-by-finite)).

2015 年, 笔者和 Jackson[15] 证明了所有可数交换群的作用所引出的轨道等价关系都是超限的. 这是近期关于可控群作用问题的一个突破. 笔者的学生 Seward 与合作者 Schneider[32] 最近也进一步将此结果推广到局部幂零群. 在越来越多的年轻数学工作者的不断关注下, 相信这一问题还会不断取得进展.

在这一节中到目前为止我们考虑的复杂度都是围绕着 E_0 的, 但具体的等价关系则林林总总, 来自不同的背景. 读者可能已经注意到了, 我们的很多来自理论的等价关系的例子都是轨道等价关系, 或者 Borel 等价于轨道等价关系. 事实上, 我们在本文中到目前为止考虑过的所有等价关系或分类问题都是如此. 比如, $=_{\mathbb{R}}$ 可以看成来自于平凡群的平凡作用, E_0 也可以看成来自于群作用; 这里的群是可数无穷多个二元群的直和. $\equiv_m$ 虽然不直接来自群作用, 但它 Borel 等价于一个无穷维酉群的作用所引出的轨道等价关系.

轨道等价关系确实是基准等价关系最主要的来源. 下面我们对它们作一个系统的介绍. 首先来确定作用群的范畴.

定义 5.4.2　设 G 为拓扑群. 若 G 上的拓扑为可分的并且可以完备度量化, 则称 G 为 Polish *群*.

具有离散拓扑的可数群都是 Polish 群, 前面提到的无穷维酉群也是 Polish 群等. 总之, 到目前为止我们在本文中遇到的群都是 Polish 群.

定义 5.4.3　设 G 为 Polish 群及 X 为标准 Borel 空间. 若 $G \curvearrowright X$ 为 Borel 群作用, 则称它引出的轨道等价关系为 *G-轨道等价关系*.

1993 年, Becker 和 Kechris[1] 证明了如下的有趣结果.

定理 5.4.5 (Becker–Kechris)　固定任意 Polish 群 G, 都存在 G- 轨道等价关系 E, 使得对任何 G- 轨道等价关系 F, 都有 $F \leqslant_B E$.

也就是说, 对于任意 Polish 群 G 都存在一个复杂度最高的 G- 轨道等价关系. 我们把它记为 E_G^∞. 因为我们只关心等价关系的复杂度, E_G^∞ 的具体定义并不重要.

那么, 不同的 Polish 群之间的这种极大轨道等价关系之间是否有联系呢? 确实如此. 早在 1963 年, Mackey[27] 就研究了不同 Polish 群的作用之间的联系. 利用 Mackey 的方法, 可以得出如下结论.

定理 5.4.6 (Mackey)　*设 G 和 H 为 Polish 群. 若 G 是 H 的闭子群或者 G 是 H 的拓扑商群, 则 $E_G^\infty \leqslant_B E_H^\infty$.*

由此可见，如果我们对 Polish 群有很好的了解, 则对和它们相应的极大轨道等价关系之间的 Borel 归约也就有了一定的了解. 发展到这一步, 不变量描述集合论就和拓扑群理论紧密联系起来了.

1986 年 Uspenskij[33] 证明了存在最大的 Polish 群, 即一个包含所有其他

Polish 群为闭子群的 Polish 群. 由此我们可以推出, 存在一个最复杂的轨道等价关系, 即所有其他的轨道等价关系都 Borel 归约于它. Uspenskij 的最大 Polish 群是 Hilbert 方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的自同胚群. 1990 年 Uspenskij[34] 又发现了另一个同样是最大的 Polish 群, 即最大 Urysohn 空间的等距同构群.

受 Uspenskij 结果的启发, 在 20 世纪 80 年代后期 Kechris 提出如下的问题：是否存在一个 Polish 群, 使得任何其他 Polish 群都是它的拓扑商群？这样的群后来被称作最大映满 Polish 群.

在这个问题上我们中国数学家做了很好的工作. 2012 年, 南开大学的丁龙云用非常复杂的构造作出了最大映满 Polish 群的例子[5].

5.5 轨道等价关系

前面讲到, 和 Polish 群相应的极大轨道等价关系是基准等价关系的主要来源. 比如, $=_{\mathbb{R}}$ 可以看成平凡群的极大轨道等价关系, 而 E_0 则对应于极大 $\mathbb{Z}$- 轨道等价关系 (或任何可数无穷交换群). 在 Polish 群中这些是比较小的群. 在这一节中我们着重介绍三个比较大的 Polish 群. 它们的极大轨道等价关系也比较复杂.

我们要介绍的第一个 Polish 群是无穷置换群 S_∞. S_∞ 的元素是所有 $\mathbb{N}$ 的置换, 即 $\mathbb{N}$ 到它自己的一一对应. 在代数或组合中有时也把 S_∞ 记为 $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. 这里的群运算是置换和置换的复合, 而 S_∞ 上的拓扑则是逐点收敛拓扑. 在这样的结构下 S_∞ 构成一个 Polish 群.

所有可数群都可以作为离散群嵌入 S_∞, 因此所有可数群作用引出的轨道等价关系都 Borel 归约于 $E^\infty_{S_\infty}$. 这样的例子包括 E_0. 虽然连续群不能嵌入 S_∞(因为 S_∞ 是零维的), 但并不妨碍有些连续群的轨道等价关系 Borel 归约到 S_∞- 轨道等价关系. 1992 年 Kechris[24] 就证明了所有局部紧 Polish 群的轨道等价关系都 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$.

$E^\infty_{S_\infty}$ 是一个重要的基准等价关系, 因为它对应着众多自然的分类问题. 在数理逻辑的分支模型论中早就知道 $E^\infty_{S_\infty}$ 对应着可数 (有向或无向) 图的同构问题. 所以在很多文献中也用图同构来代表 $E^\infty_{S_\infty}$.

1989 年 Friedman 和 Stanley[12] 证明了和 $E^\infty_{S_\infty}$ 具有相同复杂度的分类问题还包括：可数群的同构问题、可数树的同构问题、可数域的同构问题等. 2001 年 Camerlo 和笔者[3] 证明了和 $E^\infty_{S_\infty}$ 具有相同复杂度的分类问题还包括：可数布尔代数的同构问题、所有零维紧度量空间的同胚问题、所有几乎有限维 (AF)C^*- 代数的同构问题等.

直观地说, 要判断一个等价关系或分类问题是否 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$, 等同于

确定是否可以用某种可数结构作为完全不变量来对分类问题的对象进行分类. 比如, 几乎有限维 C^*- 代数的同构类型是由 Bratteli 图或维数群的同构决定的, 而这些结构都是可数的. 所以, 由 C^*- 代数中熟知的结果很快可以知道几乎有限维 C^*- 代数的同构问题可以 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$. 上述结果的重点其实在于证明逆方向, 即不可能用比 $E^\infty_{S_\infty}$ 简单的等价关系来对几乎有限维 C^*- 代数进行分类.

那么有没有不能用可数结构来进行分类的分类问题呢? 其实我们已经遇到了这样的例子, 就是测度等价关系 $\equiv_m$. 笔者的已故导师 Hjorth 在 20 世纪 90 年代后期发展了一套完整的理论, 来探讨何种条件可以保证一个等价关系不 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$. 这一理论被称为动荡 (turbulence) 理论 (参看 [22]). 动荡理论的基本概念是 Hjorth 定义的动荡作用的概念, 这是由简单的可验证的拓扑条件来描述的. Hjorth 证明了动荡作用引出的轨道等价关系不可能 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$. 而最初的几个动荡作用的例子全部来自于经典 Banach 空间的群作用, 如 $\ell_p(p\geqslant 1)$ 或 c_0 作为 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 的加法子群在 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 上的陪集等价关系. 而测度等价关系 $\equiv_m$ 因为复杂度高于 ℓ_2 在 $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 上的陪集等价关系 (这来自于 20 世纪 30 年代 Kakutani 的一个有趣结果), 从而不可能 Borel 归约到 $E^\infty_{S_\infty}$.

自从动荡理论问世以来已经有众多的应用, 大批分类问题被发现不能用可数结构来进行分类. 在这里不一一赘述, 有兴趣的读者可以查阅相关文献.

这一节要介绍的第二个大 Polish 群是无穷维酉群 U_∞. U_∞ 的元素是可分无穷维复 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$(这样的空间是唯一的) 上所有的酉变换. U_∞ 上的群运算是酉变换的复合, 而拓扑是 (强或弱) 算子拓扑. 这样的结构使得 U_∞ 成为一个 Polish 群. 在泛函分析和算子代数中也经常将 U_∞ 记为 $U(\mathbb{H})$. 这里我们用 U_∞ 来强调它上的标准拓扑为算子拓扑 (因为在泛函分析和算子代数中也经常讨论 $U(\mathbb{H})$ 上的范数拓扑, 而 $U(\mathbb{H})$ 在范数拓扑下不是 Polish 群) 以及强调它与 S_∞ 一脉相承的关系.

S_∞ 是 U_∞ 的闭子群, 于是有 $E^\infty_{S_\infty}\leqslant_B E^\infty_{U_\infty}$. 2003 年笔者和 Pestov[18] 证明了所有交换 Polish 群都是 U_∞ 一个闭子群的拓扑商群. 由此可以推出, 所有交换 Polish 群的轨道等价关系都 Borel 归约到 $E^\infty_{U_\infty}$. 前面提到的经典 Banach 空间的加法群都是交换群, 所以它们的轨道等价关系也就属于这一范畴. 特别是, 动荡理论告诉我们, $E^\infty_{U_\infty}$ 的复杂度高于 $E^\infty_{S_\infty}$ 的复杂度.

在讨论 $E^\infty_{U_\infty}$ 复杂度的具体例子之前我们先看一个特殊的 U_∞- 轨道等价关系的例子, 那就是 U_∞ 在它自身上的共轭作用所引出的轨道等价关系. 不难看出, 这实际上是在考虑酉算子的酉等价问题, 而我们前面已经说过, 谱理论的成果是说这个分类问题和测度等价关系 $\equiv_m$ 的复杂度相同. 总之, 我们现在真正了解了 $\equiv_m$ 的地位, 那就是它是一个 U_∞- 轨道等价关系, 并且它不能归约到任何 S_∞- 轨道等

价关系.

关于 $E^{\infty}_{U_\infty}$ 复杂度的具体例子, 到目前为止只知道一个. 2005 年笔者[13] 证明了如下结果. 考虑所有可以等距嵌入 $\mathbb{H}$ 的可分完备度量空间. 它们之间的等距同构关系与 $E^{\infty}_{U_\infty}$ 具有相同的复杂度.

下面要介绍最后一个大 Polish 群, 就是前一节提到的 Uspenskij 的最大 Polish 群. 实际上 Uspenskij 给出了两个这样的群的例子. 一个是 Hilbert 方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的自同胚群, 另一个是最大 Urysohn 空间的等距同构群. 无论哪一个, 都对应着最复杂的轨道等价关系, 称之为最大轨道等价关系.

读者可能已经猜到, 最大轨道等价关系也有实际分类问题的例子. 2003 年, 笔者和 Kechris[17] 给出了第一个这样的例子, 即所有可分完备度量空间的等距同构分类问题. 2007 年 Melleray[28] 给出了第二个例子, 即所有可分 Banach 空间的等距同构 (对于 Banach 空间来说等距同构一定是线性的). 最近几年, 又有几个重要的例子被发现：所有可分 C^*-代数的同构问题 (Sabok[31])、所有紧度量空间的同胚问题 (Zielinski[35])、所有可分连续统的同胚问题 (笔者和其学生常晟[4]). 虽然这些例子来自不同的数学领域, 涵盖几何、分析、代数、拓扑等不同数学分支, 但奇特的是所有以上结果的证明都是相连的. 这再一次有力地证明, 数学是一个整体, 数学的各个分支之间有着极为深刻的联系.

读者可能已经注意到, 在本节提到的轨道等价关系中我们对 $E^{\infty}_{U_\infty}$ 知道的最少. 事实上, 笔者认为关于轨道等价关系最重要的未知问题就是 $E^{\infty}_{U_\infty}$ 是否和最大轨道等价关系具有相同的复杂度. 如果答案是否定的, 那么我们应该可以发展出一套新的超动荡理论, 这将是对不变量描述集合论的一个巨大贡献. 而如果答案是肯定的, 那么是否可以说, 泛函分析和算子代数中蕴藏着解决数学其他领域中问题的秘密呢？无论结论如何, 这都是一个极为重要的问题.

5.6 非轨道等价关系

好奇的读者可能会问：除了轨道等价关系之外还有哪些等价关系呢？在这一节中我们作一个极为简要的介绍.

首先定义一个具体的等价关系. 考虑无穷 0, 1 串的无穷序列组成的空间, 即 $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. 定义 E_1 为这个空间上的终极相等关系：

$$(x,y)\in E_1 \iff \exists n,\ \forall m\geqslant n,\ x(m)=y(m).$$

看上去这个定义和 E_0 的定义一模一样, 但区别是这里的 $x(m)$ 和 $y(m)$ 是无穷 0, 1 串.

1997 年 Kechris 和 Louveau[26] 证明了 E_1 的一系列独特性质. 首先, E_1 不能 Borel 归约到任何 Polish 群作用的轨道等价关系. 其次, $E_0 <_B E_1$ 并且在它们之间没有任何其他复杂度. 从这个意义上讲 E_1 可以看成是一个极小的非轨道等价关系. Kechris 和 Louveau 进一步问：是否所有非轨道等价关系的复杂度都高于或等于 E_1? 这一问题到目前还没有解决.

和轨道等价关系一样, 有很多非轨道等价关系也有对应的自然分类问题. 对于这些问题来说, 无论实数、可数结构, 或测度等都不可能给它们完全分类. 举例来说, 所有可分 Banach 空间的一致同胚问题就是这样一个问题 (笔者、Jackson 和 Sari, 2011 年[16]).

我们现在的讨论已经超出了轨道等价关系的范畴, 但还没有超出解析等价关系的范畴. 在描述集合论中, 解析集是指标准 Borel 空间之间 Borel 函数的像集合. 解析集是比 Borel 集更广的一个概念. 在本文中遇到的所有集合都是解析集. 这包括所有的轨道等价关系. 而 E_1 实际上是 Borel 的, 所以也是解析等价关系.

从经典描述集合论容易证明, 存在一个最大解析等价关系. 2009 年, Ferenczi、Louveau 和 Rosendal[10] 发现了一系列和最大解析等价关系复杂度相同的自然分类问题的例子. 他们的例子之一是所有可分 Banach 空间的同构问题.

5.7 结论与前景

到这里读者对不变量描述集合论的全貌应该已经有了不错的了解. 在最后一节里我们对 5.2 节末尾所提出的六个分类问题作一总结.

这六个问题中的三个已经得到了满意的解答. 这里的满意, 不再指流畅的分类, 而是指完全确定该分类问题在 Borel 归约分层中的地位. 比如, 所有可数群的同构关系和 S_∞- 极大轨道等价关系有相同的复杂度. 而所有可分完备度量空间的等距同构问题, 以及所有紧度量空间的同胚问题, 都和最大轨道等价关系有相同的复杂度. 有了这些知识我们就知道, 前一个问题的复杂度低于后两个问题的复杂度, 而后面两个问题, 虽然来自不同的数学分支, 但具有相同的复杂度.

另外的三个问题则有待数学工作者的进一步研究. 无穷维 Hilbert 空间上所有有界线性算子的酉等价问题, 是泛函分析和算子代数中极为重要的问题. 我们现在还不知道它的确切复杂度在哪里. 数学家们一直想找到一种推广的谱理论来解决这一问题. 从描述集合论的观点来看, 我们可以先问这个等价关系是否是 Borel 的. 如果结论是否定的, 那么在某种意义上说, 推广谱理论就是不可能的. 2014 年, 丁龙云和笔者[6] 发现, 这个等价关系确实是 Borel 的, 这就表明推广谱理论是有希望的.

至于 von Neumann 提出的所有保测变换的同构问题, 似乎还有很长的路要走. 现在已经知道, 这个等价关系的复杂度高于 S_∞- 极大轨道等价关系, 但不高于 U_∞- 极大轨道等价关系. 但它的确切复杂度还是个谜.

最后, 关于所有可分 C^*- 代数表示的酉等价问题, 还没有明确的结论. 但近期关于所有可分 C^*- 代数的同构问题的研究, 应该给这个问题的解决, 带来了一线曙光.

不变量描述集合论已经发展成了一个庞大的理论体系. 它的基本概念, 即 Borel 归约的概念, 相对来说非常简单. 但它的方法和结果则集成了百年以来描述集合论发展的成果, 同时也融入了拓扑群理论、动力系统和遍历论, 以及数理逻辑的其他分支, 如可计算性理论、模型论和组合集合论 (特别是力迫法) 的方法与成果. 在应用方面, 它和其他数学分支的联系就更多了.

由于篇幅所限, 这篇介绍性的文章不可能包罗不变量描述集合论的所有重要结果. 比如这一理论中还有一系列的二分定理, 我们并没有提到. 有时甚至整个研究方向, 比如关于所谓可数等价关系的研究, 又比如对 Vaught 猜想的研究, 都没有提及. 这样一个庞杂的理论体系, 对于初学者来说可能也有些无所适从. 我们在本文的最后介绍一下学习描述集合论和等价关系理论的入门教材. 关于标准 Borel 空间的基本知识, 读者可以参看经典描述集合论的教材 [25]. 学习不变量描述集合论, 则可以参考 [2] 和 [14]. 虽然学习描述集合论需要比较多的准备知识, 但只要坚持不懈, 并且永远保持一个开放的心态, 相信有志者一定可以在这个充满活力和挑战的领域中大显身手.

参 考 文 献

[1] Becker H, Kechris A S. Borel ations of Polish groups. Bull. Amer. Math. Soc., 1993, 28 (2): 334–341.

[2] Becker H, Kechris A S. The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 232, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[3] Camerlo R, Gao S. The completeness of the isomorphism relation for countable Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 2011, 353(2): 491–518.

[4] Chang C, Gao S. The complexity of the classification problem of continua, manuscript, Proc. Amer. Math. Soc., 2017, 145(3): 1329–1342.

[5] Ding L Y. On surjectively universal Polish groups. Adv. Math., 2012, 231(5): 2557–2572.

[6] Ding L Y, Gao S. Is there a Spectral Theory for all bounded linear operators? Notices Amer. Math. Soc., 2014, 61 (7): 730–735.

[7] Dougherty R, Jackson S, Kechris A S. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 341(1): 193–225.
[8] Effros E G. Transformation groups and C^*-algebras. Ann. Math., 1965, (2) 81(1): 38–55.
[9] Feldman J. Borel structures and invariants for measurable transformations. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 46: 383–394.
[10] Ferenczi V, Louveau A, Rosendal C. The complexity of classifying separable Banach spaces up to isomorphism. J. Lond. Math. Soc., 2009, 79(2): 323–345.
[11] Foreman M, Rudolph D J, Weiss B. The conjugacy problem in ergodic theory. Ann. Math., 2011, 173(2): 1529–1586.
[12] Friedman H, Stanley L. A Borel reducibility theory for classes of countable structures. J. Symb. Logic, 1989, 54(3): 894–914.
[13] Gao S. Unitary group actions and Hilbertian Polish metric spaces. Logic and Its Applications. Contemporary Mathematics 380, American Mathematical Society, RI, 2005: 53–72.
[14] Gao S. Invariant Descriptive Set Theory. Pure and Applied Mathematics, vol. 293, Taylor & Francis Group, 2009.
[15] Gao S, Jackson S. Countable abelian group actions and hyperfinite equivalence relations. Invent. Math., 2015, 201(1): 309–383.
[16] Gao S, Jackson S, Sari B. On the complexity of the uniform homeomorphism relation between separable Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 2011, 363(6): 3071–3099.
[17] Gao S, Kechris A S. On the classification of Polish metric spaces up to isometry. Mem. Amer. Math. Soc., 2003, 161(766): vii+78.
[18] Gao S, Pestov V. On a universality property of some abelian Polish groups. Fund. Math., 2003, 179(1): 1–15.
[19] Glimm J. Locally compact transformation groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, 101: 124–138.
[20] Gromov M. Metric Structure for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics 152. Boston: Birkh́auser, 1999.
[21] Harrington L A, Kechris A S, Louveau A. A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations. J. Amer. Math. Soc., 1990, 3(4): 903–928.
[22] Hjorth G. Classifications and Orbit Equivalence Relations. Mathematics Surveys and Monographs 75. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
[23] Jackson S, Kechris A S, Louveau A. Countable Borel equivalence relations. J. Math. Logic, 2002, 2(1): 1–80.
[24] Kechris A S. Countable actions for locally compact group actions. Ergodic Theory Dynam. Systems, 1992, 12(2): 283–295.
[25] Kechris A S. Classical Descriptive Set Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol.

156, New York: Springer-Verlag, 1995.

[26] Kechris A S, Louveau A. The classification of hypersmooth Borel equivalence relations. J. Amer. Math. Soc., 1997, 10(1): 215–242.

[27] Mackey G W. Infinite-dimensional group representations. Bull. Amer. Math. Soc., 1963, 69: 628–686.

[28] Melleray J. Computing the complexity of the relation of isometry between separable Banach spaces. MLQ Math. Log. Q., 2007, 53(2): 128–131.

[29] Ornstein D. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. Adv. Math., 1970, 4: 337–352.

[30] Ornstein D, Weiss B. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin Lemma. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1980, 2(1): 161–164.

[31] Sabok M. Completeness of the isomorphism problem for separable C^*-algebras. Invent. Math., 2016, 204(3): 833–868.

[32] Seward B, Schneider S. Locally nilpotent groups and hyperfinite equivalence relations. manuscript, 2013. Available at arXiv: 1308.5853.

[33] Uspenskij V V. A universal topological group with a countable basis. Funct. Anal. Appl., 1986, 20: 86–87.

[34] Uspenskij V V. On the group of isometries of the Urysohn universal metric space. Comm. Math. Univ. Carolinae, 1990, 31(1): 181–182.

[35] Zielinski J. The complexity of the homeomorphism relation between compact metric spaces. Adv. Math., 2016, 291: 635–645.